Expection of String

问题简析

为了计算期望，我们直接求出所有的可能。

对于一个串 s，记这个串的计算结果为 $\varphi(s)$，并设串的长度为 N。

因为，每一次交换后会得到多个可能的串，我们用 $\Gamma(k,p)$ 表示执行 k 次交换后，所有乘号在位置 p 处的串构成的可重集合。所以我们想要的答案就是 $\displaystyle\sum_{p=1}^{N}\sum_{s\in\Gamma(K,p)}\varphi(s)$

设，$f(k,p,a,b)=\displaystyle\sum_{s\in\Gamma(k,p)} s_a\times s_b$。

注意到，$\varphi(s)=\left(\displaystyle\sum_{a=1}^{p-1} s_a\times 10^{p-a-1}\right)\times\left(\displaystyle\sum_{b=p+1}^{N} s_b\times 10^{N-b}\right)=\displaystyle\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=p+1}^{N} s_a\times s_b\times 10^{p-a-1+N-b}$

所以，$\displaystyle\sum_{p=1}^{N}\sum_{s\in\Gamma(K,p)}\varphi(s)=\sum_{p=1}^{N}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=p+1}^{N} f(K,p,a,b)\times 10^{p-a-1+N-b}$

接着，考虑如何进行 $f(k,p,a,b)$ 的状态转移。

1. a 动　b 动　p 动
2. a 动　b 动　p 不动
3. a 动　b 不动　p 动
4. a 动　b 不动　p 不动
5. a 不动　b 动　p 动
6. a 不动　b 动　p 不动
7. a 不动　b 不动　p 动
8. a 不动　b 不动　p 不动

我们逐一进行考虑，则所有情况的和就是 $f(k+1,p,a,b)$。

1. 显然不可行，故贡献为：　0
2. 即，a 上的字符和 b 上的字符交换，贡献为：　$f(k,p,b,a)$
3. 即，a 上的字符和 p 上的字符交换，贡献为：　$f(k,a,p,b)$
4. 即,a 上的字符和剩下的 $N-3$ 个字符中任一字符交换,贡献为：　$\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\ i\neq a,\ i\neq b,\ i\neq p} f(k,p,i,b)$
5. 即，b 上的字符和 p 上的字符交换，贡献为：　$f(k,b,a,p)$
6. 即,b 上的字符和剩下的 $N-3$ 个字符中任一字符交换,贡献为：　$\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant N,\ i\neq a,\ i\neq b,\ i\neq p} f(k,p,a,i)$

7. 即,p 上的字符和剩下的 $N-3$ 个字符中任一字符交换,贡献为: $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant N,\ i\neq a,\ i\neq b,\ i\neq p} f(k,i,a,b)$

8. 即，在剩下的 $N-3$ 个字符中任选两个字符，贡献为: $\binom{N-3}{2}\times f(k,p,a,b)$

对于 **4**、**6**、**7** 利用前缀和，可以在 $O(1)$ 的时间内计算出来。

算法总复杂度为 $O(n^4)$。

参考链接

http://async.icpc-camp.org/d/304-shanghai-2015-e-expection-of-string/4